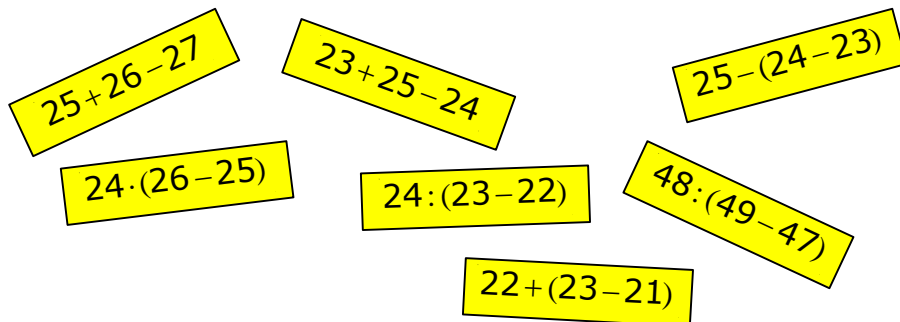


Lernumgebung ‚drei aufeinanderfolgende Zahlen‘

Die Lehrkraft gibt sieben Terme vor und stellt die Arbeitsaufträge ‚Berechne den Wert von mindestens drei Termen. Beschreibe und vergleiche die Terme.‘



$25+26-27$
 $23+25-24$
 $25-(24-23)$
 $24 \cdot (26-25)$
 $24 : (23-22)$
 $48 : (49-47)$
 $22+(23-21)$

Mögliche Ergebnisse: Alle Terme haben den Wert 24. Alle Terme enthalten drei aufeinanderfolgende Zahlen, aber nicht unbedingt in aufsteigender oder absteigender Reihenfolge. Einige beginnen bei 21, andere bei 47.

Anschließend nennt die Lehrkraft die Bedingung ‚im Wettbewerb um die Zahl 24 gewinnt der Term, der den Wert 24 mit den drei kleinsten aufeinanderfolgenden Zahlen darstellt‘ und zeigt ggf. einen Term, dessen Zahlen die der genannten Terme unterbieten. $12 \cdot (13-11)$

Den zweiten Platz hält übrigens $7+8+9$, es gewinnt $2 \cdot 3 \cdot 4$.

Die Lehrkraft hängt eine große Tabelle aus und eröffnet den Wettbewerb um die Werte 0 bis 100.

Stelle die Zahlen 0 bis 100 als Term aus drei möglichst kleinen aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen (einschließlich 0) dar. Du darfst die Rechenzeichen + · : und – sowie Klammern verwenden. Trage den Term und deinen Namen ein.

Wert	Term	Name	Term	Name
0 =				
1 =				
2 =				
3 =				
4 =				

MA-THEMA Langzeitwettbewerb

Stelle die Zahlen 0 bis 100 als Term aus drei möglichst kleinen aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen (einschließlich 0) dar. Du darfst die Zeichen + · : und – sowie Klammern verwenden. Trage den Term und deinen Namen ein.

Term	Name	Term	Name
0 =			
1 =			
2 =			
3 =			
4 =			
5 =			
6 =			
7 =			
8 =			
9 =			
10 =			
11 =			
12 =			
13 =			
14 =			
15 =			
16 =			
17 =			
18 =			
19 =			
20 =			
21 =			
22 =			
23 =			
24 =			
25 =			
26 =			
27 =			
28 =			
29 =			
30 =			
31 =			
32 =			
33 =			
34 =			
35 =			
36 =			
37 =			
38 =			
39 =			
40 =			
41 =			
42 =			
43 =			
44 =			
45 =			
46 =			
47 =			

Term	Name	Term	Name
48 =			
49 =			
50 =			
51 =			
52 =			
53 =			
54 =			
55 =			
56 =			
57 =			
58 =			
59 =			
60 =			
61 =			
62 =			
63 =			
64 =			
65 =			
66 =			
67 =			
68 =			
69 =			
70 =			
71 =			
72 =			
73 =			
74 =			
75 =			
76 =			
77 =			
78 =			
79 =			
80 =			
81 =			
82 =			
83 =			
84 =			
85 =			
86 =			
87 =			
88 =			
89 =			
90 =			
91 =			
92 =			
93 =			
94 =			
95 =			
96 =			
97 =			
98 =			
99 =			
100 =			

Lösungsbeispiele jeweils links mit den drei kleinsten möglichen Zahlen, rechts schematisch

kleinste	schematisch		
		50 = 5 · (4 + 6)	25 · (26 - 24)
0 = (2 + 1) · 0		51 = 16 + 17 + 18	16 + 17 + 18
1 = 1 + (2 · 0)		52 = 26 · (27 - 25)	26 · (27 - 25)
2 = (1 · 2) + 0	1 · (2 - 0)	53 = 51 + (52 - 50)	52 + (51 - 50)
3 = 0 + 1 + 2	0 + 1 + 2	54 = 6 · (4 + 5)	17 + 18 + 19
4 = 3 + (2 - 1)	2 · (3 - 1)	55 = 7 + (6 · 8)	54 + (53 - 52)
5 = (1 · 3) + 2	4 + (3 - 2)	56 = 28 · (29 - 27)	28 · (29 - 27)
6 = 1 + 2 + 3	1 + 2 + 3	57 = 18 + 19 + 20	18 + 19 + 20
7 = 1 + (2 · 3)	6 + (5 - 4)	58 = 29 · (30 - 28)	29 · (30 - 28)
8 = 2 · (1 + 3)	4 · (5 - 3)	59 = 57 + (58 - 56)	58 + (57 - 56)
9 = (1 + 2) · 3	2 + 3 + 4	60 = 3 · 4 · 5	19 + 20 + 21
10 = (2 · 3) + 4	5 · (6 - 4)	61 = 60 + (59 - 58)	60 + (59 - 58)
11 = (2 · 4) + 3	10 + (9 - 8)	62 = 6 + (7 · 8)	31 · (32 - 30)
12 = 3 + 4 + 5	3 + 4 + 5	63 = 20 + 21 + 22	20 + 21 + 22
13 = 12 + (11 - 10)	12 + (11 - 10)	64 = 32 · (33 - 31)	32 · (33 - 31)
14 = 2 · (3 + 4)	7 · (8 - 6)	65 = 5 · (6 + 7)	64 + (63 - 62)
15 = 4 + 5 + 6	4 + 5 + 6	66 = 21 + 22 + 23	21 + 22 + 23
16 = 8 · (9 - 7)	8 · (9 - 7)	67 = 66 + (65 - 64)	66 + (65 - 64)
17 = (3 · 4) + 5	16 + (15 - 14)	68 = 34 · (35 - 33)	34 · (35 - 33)
18 = 3 · (2 + 4)	5 + 6 + 7	69 = 22 + 23 + 24	22 + 23 + 24
19 = (3 · 5) + 4	18 + (17 - 16)	70 = 35 · (36 - 34)	35 · (36 - 34)
20 = 4 · (2 + 3)	10 · (11 - 9)	71 = (7 · 9) + 8	70 + (69 - 68)
21 = 6 + 7 + 8	6 + 7 + 8	72 = 6 · (5 + 7)	23 + 24 + 25
22 = 11 · (12 - 10)	11 · (12 - 10)	73 = 72 + (71 - 70)	72 + (71 - 70)
23 = 3 + (4 · 5)	22 + (21 - 20)	74 = 37 · (38 - 36)	37 · (38 - 36)
24 = (2 · 3) · 4	7 + 8 + 9	75 = 24 + 25 + 26	24 + 25 + 26
25 = 24 + (23 - 22)	24 + (23 - 22)	76 = 38 · (39 - 37)	38 · (39 - 37)
26 = (4 · 5) + 6	13 · (14 - 12)	77 = 7 · (5 + 6)	76 + (75 - 74)
27 = 3 · (4 + 5)	8 + 9 + 10	78 = 25 + 26 + 27	25 + 26 + 27
28 = 14 · (15 - 13)	14 · (15 - 13)	79 = 7 + (8 · 9)	78 + (77 - 76)
29 = 5 + (4 · 6)	28 + (27 - 26)	80 = 40 · (41 - 39)	40 · (41 - 39)
30 = 9 + 10 + 11	9 + 10 + 11	81 = 26 + 27 + 28	26 + 27 + 28
31 = 30 + (29 - 28)	30 + (29 - 28)	82 = (8 · 9) + 10	41 · (42 - 40)
32 = 4 · (3 + 5)	16 · (17 - 15)	83 = 82 + (81 - 80)	82 + (81 - 80)
33 = 10 + 11 + 12	10 + 11 + 12	84 = 27 + 28 + 29	27 + 28 + 29
34 = 4 + (5 · 6)	17 · (18 - 16)	85 = 84 + (83 - 82)	84 + (83 - 82)
35 = (3 + 4) · 5	34 + (33 - 32)	86 = 43 · (44 - 42)	43 · (44 - 42)
36 = 11 + 12 + 13	11 + 12 + 13	87 = 28 + 29 + 30	28 + 29 + 30
37 = (5 · 6) + 7	36 + (35 - 34)	88 = 44 · (45 - 43)	44 · (45 - 43)
38 = 19 · (20 - 18)	19 · (20 - 18)	89 = (8 · 10) + 9	88 + (87 - 86)
39 = 12 + 13 + 14	12 + 13 + 14	90 = 6 · (7 + 8)	29 + 30 + 31
40 = 20 · (21 - 19)	20 · (21 - 19)	91 = 90 + (89 - 88)	90 + (89 - 88)
41 = 6 + (5 · 7)	40 + (39 - 38)	92 = 46 · (47 - 45)	46 · (47 - 45)
42 = 13 + 14 + 15	13 + 14 + 15	93 = 30 + 31 + 32	30 + 31 + 32
43 = 42 + (41 - 40)	42 + (41 - 40)	94 = 47 · (48 - 46)	47 · (48 - 46)
44 = 4 · (5 + 6)	22 · (23 - 21)	95 = 94 + (93 - 92)	94 + (93 - 92)
45 = 14 + 15 + 16	14 + 15 + 16	96 = 31 + 32 + 33	31 + 32 + 33
46 = 23 · (24 - 22)	23 · (24 - 22)	97 = 96 + (95 - 94)	96 + (95 - 94)
47 = 5 + (6 · 7)	46 + (45 - 44)	98 = 7 · (6 + 8)	49 · (50 - 48)
48 = 15 + 16 + 17	15 + 16 + 17	99 = 32 + 33 + 34	32 + 33 + 34
49 = 48 + (47 - 46)	48 + (47 - 46)	100 = 50 · (51 - 49)	50 · (51 - 49)

weitere Erkenntnisse und allgemeingültige Formeln

Summendarstellung von Zahlen, die durch drei teilbar sind

Ab 3 ist jede dritte Zahl als Summe von drei aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen einschließlich 0 darstellbar: $(n-1) + n + (n+1) = 3 \cdot n$; hierbei steht n für die mittlere der drei Zahlen. Viele Lösungen dieser Art erfüllen die Forderung nach den kleinsten drei aufeinanderfolgenden Zahlen. Ausnahmen sind 9, 18, 27, 54, 60, 72 und 90, die selbstverständlich auch als Summe darstellbar sind – aber mit drei größeren aufeinanderfolgenden Zahlen.

gerade Zahlen, die nicht durch drei teilbar sind

Idee: Der Faktor 2 lässt sich als $(n+1) - (n-1) = n+1 - n+1 = 2$ darstellen, wobei n wieder die mittlere der drei Zahlen bedeuten soll. Deshalb kann jede gerade Zahl in der Form $n \cdot ((n+1) - (n-1)) = 2 \cdot n$ als das Doppelte der mittleren Zahl geschrieben werden, zum Beispiel $38 = 19 \cdot (20 - 18)$. Allerdings gibt es häufig Darstellungen mit drei kleineren auseinanderfolgenden Zahlen, zum Beispiel bei 2, 8, 16, 18 usw.

Selbstverständlich lassen sich gerade Zahlen, die durch 3 teilbar sind, ebenfalls in der Form $n \cdot ((n+1) - (n-1)) = 2 \cdot n$, also als das Doppelte der mittleren Zahl darstellen. Jedoch ist bei diesen Zahlen die Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen das Dreifache einer mittleren Zahl, die deutlich kleiner sein kann, während in dem konkurrierenden Term die kleinste der drei Zahlen subtrahiert wird. Beispiel: Statt $12 = 3 + 4 + 5$ erfordert $12 = 11 + (10 - 9)$ drei deutlich größere Zahlen.

ungerade Zahlen, die nicht durch drei teilbar sind

Idee: Der Summand 1 lässt sich als $(n - (n-1)) = 1$ darstellen.

Beispiel: $25 = 24 + (23 - 22)$, allgemein: $n + 2 = (n+1) + ((n - (n-1)))$.

Da $n + 2$ eine ungerade Zahl ist, muss $(n+1)$ eine gerade Zahl sein. Es ist die größte der drei aufeinanderfolgenden Zahlen. Zu dieser Zahl, im Beispiel 24, wird eine 1 addiert. Diese 1 hat die Form $1 = (n - (n-1))$, also die mittlere Zahl minus die kleinste Zahl.

Ausnahmen: Bei sehr vielen Zahlen wie 5, 7, 11 usw. gibt es Darstellungen in der Form „Zahl plus Produkt“ mit drei kleineren Zahlen.

Ausnahme oder Regel?

Bei den ungerade Zahlen, die nicht durch drei teilbar sind, ist die Anzahl der Ausnahmen weitaus größer als die derjenigen Zahlen, die sich in der Form „gerade Zahl plus 1“ mit den drei kleinsten aufeinanderfolgenden Zahlen darstellen lassen. Ziel beim Aufstellen dieser Regeln ist jedoch der Schluss „Es geht immer!“.

Mit den drei Fällen „durch drei teilbar“, „ungerade und nicht durch 3 teilbar“ sowie „gerade (und dabei nicht durch drei teilbar)“ haben wir alle natürlichen Zahlen erfasst. Alle natürlichen Zahlen sind also als Term aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit den vier Grundrechenarten sowie Klammern darstellbar.

Auch mit dem Term $(n+1) \cdot (n - (n-1)) = (n+1) \cdot 1 = n+1$ lässt sich jede natürliche Zahl darstellen. Häufig gibt es jedoch Darstellungen mit drei kleineren Zahlen.

Allgemeingültige Tricks

eine 1 darstellen: $(n - (n-1)) = 1$

eine 2 darstellen: $(n+1) - (n-1) = n+1 - n+1 = 2$

eine durch 3 teilbare Zahl darstellen: $(n-1) + n + (n+1) = 3 \cdot n$

jede natürliche Zahl ab 2 darstellen: $(n+1) \cdot (n - (n-1)) = n+1$

der jeweils größte Wert eines Terms

Wenn eine natürliche Zahl als Term aus drei möglichst kleinen aufeinanderfolgenden Zahlen dargestellt werden soll, ist zumindest für drei kleinere Zahlen die Frage interessant, wie groß der Wert eines Terms aus mit diesen Zahlen überhaupt werden kann.

Bei 6 gibt es mit $1+2+3=1\cdot 2\cdot 3$ einen Gleichstand zwischen Summe und Produkt. Bei kleineren Zahlen bringt die Summe mehr, genauer gesagt: Ist die Zahl 0 beteiligt, muss sie durch Addieren unschädlich gemacht werden.

Ab 24 ist der größte Term, der sich aus drei aufeinanderfolgenden natürliche Zahlen bilden lässt, deren Produkt.

Zwischen den Werten 3 und 24 lohnt es sich, die 1 nicht als Faktor zu verschwenden, sondern mit ihrer Hilfe durch Addieren die kleinere der beiden anderen Zahlen zu vergrößern, um die Summe als Faktor zu nutzen.

$n-1$	n	$n+1$	Σ	$(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$	$(n-1) + n \cdot (n+1)$	$(n-1+n) \cdot (n+1)$
0	1	2	3	0	2	2
1	2	3	6	6	7	9
2	3	4	9	24	14	20
3	4	5	12	60	23	35
4	5	6	15	120	34	54
5	6	7	18	210	47	77
6	7	8	21	336	62	104
7	8	9	24	504	79	135

Reflexionsanregende Fragen

Mit einer bestimmten Art von Fragen kann der Blick auf mögliche Vorgehensweisen gelenkt werden ohne explizit Lösungen zu verraten:

Welche Rechenausdrücke konntest du sofort finden? Wie bist du dabei vorgegangen?

Bei welchen Zahlen fällt es dir schwer, einen Rechenausdruck anzugeben? Kannst du diese Zahlen in zwei Zahlen zerlegen (als Summe oder als Produkt)?

Mit den folgenden Fragen kann der Blick über das einzelne Ergebnis hinaus auf das Muster der verschiedenen Darstellungen gelenkt werden:

Bei welchen Zahlen kannst du die Summe der drei aufeinanderfolgenden Zahlen nutzen?

Bei welchen Zahlen kannst du das Produkt der drei aufeinanderfolgenden Zahlen nutzen?

Bei welchen Zahlen musst du drei ziemlich große aufeinanderfolgenden Zahlen einsetzen?

Welche Zahlen kannst du in der Form „Zahl mal 2“ darstellen?

Welche Zahlen kannst du in der Form „Zahl plus 1“ darstellen?

Welche Zahlen kannst du in der Form „Zahl plus Produkt“ darstellen?

Welche Zahlen kannst du in der Form „Zahl mal Summenklammer“ darstellen?

Welche Zahlen kannst du in der Form „Zahl mal Minusklammer“ darstellen?

$$48 : (49 - 47)$$

$$25 + 26 - 27$$

$$25 - (24 - 23)$$

$$23 + 25 - 24$$

$$24 \cdot (26 - 25)$$

$$24 : (23 - 22)$$

$$22 + (23 - 21)$$

$$12 \cdot (13 - 11)$$

$$7 + 8 + 9$$